

正态分布置信检验方法

傅惠民, 梁朝虎

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

摘要: 正态母体特征值(母体均值、百分位值、百分率、标准差和变异系数等)的检验是工程中常见的问题。本文根据置信检验理论,建立了正态母体特征值的置信检验方法,包括母体均值、百分位值、百分率、标准差和变异系数的强检验、弱检验和弱强检验,可以满足不同的实际需求。置信检验克服了显著性假设检验在接受原假设时缺乏说服力的弱点,能够以高概率判断正态母体特征值是否满足工程中规定的条件。不但比传统的正态分布假设检验和抽样检验具有更高的精度,而且更加便于应用,许多假设检验和抽样检验难以处理的问题(如母体百分率和百分位值的检验),采用置信检验可以容易地得到解决。

关键词: 航空、航天推进系统;正态分布;置信检验;强检验;弱检验;弱强检验;假设检验;抽样检验

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Confidence Test Method for Normal Distribution

FU Hui-min, LIANG Zhao-hu

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The normal population characteristics, such as the mean, standard deviation, percentile, percentage and coefficient of variation, are often tested in engineering. Based on the theory of confidence tests, the test methods for normal population characteristics are presented in this paper, which include the strong test, the weak test and the weak-strong test. Compared with the hypothesis tests and sampling inspections for normal distribution, the confidence tests can overcome the disadvantage that to accept a null hypothesis may simply mean that it is not rejected by significance hypothesis tests, and greatly improve the test precision. The confidence tests can also bring more convenience in engineering, as that the tests for the percentile and percentage of normal population that are difficult in hypothesis tests can be easily solved by the present method.

Key words: aerospace propulsion system; normal distribution; confidence test; strong test; weak test; weak-strong test; hypothesis test; sampling inspection

1 引言

众所周知,显著性假设检验当接受原假设时仅仅意味着不拒绝原假设,也就是说接受原假设

时缺乏足够的理由和依据,这往往导致对同一问题,由于所作的假设不一样,得到的结论截然不同,甚至产生相互矛盾的结果。也正由于这个原因,还常常会将不合格产品误判为合格产品,酿成

收稿日期: 2003-03-31; 修订日期: 2003-04-25

基金项目: 国防科技预研项目(413200204)

作者简介: 傅惠民(1956—),男,浙江遂昌人,北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系“长江学者”特聘教授,博士,从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究。

重大事故。文献[1]提出了一种依据“大概率原则”进行检验的思想,文献[2]又提出了母体特征值置信分布的概念,系统地建立了基于“大概率原则”的置信检验理论,其中包括强检验、弱检验和弱强检验三种检验方法。鉴于正态分布在自然科学和社会科学中有着非常广泛的应用,本文进一步对正态分布的置信检验进行了深入系统的研究,建立了正态母体均值、百分位值、百分率、标准差和变异系数的强检验、弱检验和弱强检验,可以满足不同工程检验的需要。强检验能够以高概率确认正态母体特征值是否满足工程中规定的条件,并且在小样本时就可进行判断。弱检验属于拒绝检验,等价于传统的显著性假设检验,但是其检验的性质更加明确,“弱”字本身指出了当不能拒绝某一条件时,接受该条件的理由是不充分的。弱强检验在合格质量处是弱检验,在极限质量处是强检验,等价于传统的抽样检验,但是抽样检验何处“弱”,何处“强”,混淆不清。

2 正态母体均值的置信检验

文献[2]给出了方差已知情况下正态母体均值的置信检验,下面将进一步讨论方差未知时均值的置信检验方法。

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从母体 X 中随机抽取一个样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则均值 μ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 μ_U 和下限 μ_L 为:

$$\mu_U = \bar{x} + t_\gamma(n-1)s/\sqrt{n} \quad (1)$$

$$\mu_L = \bar{x} - t_\gamma(n-1)s/\sqrt{n} \quad (2)$$

根据文献[2]中定理 1 可知, μ 的置信分布函数 $F(\mu)$ 由下式给出:

$$F(\mu) = T\left(\frac{\mu - \bar{x}}{s/\sqrt{n}}, n-1\right) \quad (3)$$

式中 $t_\gamma(n-1)$ 为 t 分布的 γ 分位点, $T(t, n-1)$ 是自由度为 $n-1$ 的 t 分布函数; $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 和 $s =$

$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ 分别为样本均值和样本标准差。

2.1 均值的强检验

工程中常常要确认正态母体特征值是否满足规定的条件(如产品是否合格), 这类问题可采用强检验。

2.1.1 单指标强检验

对于规定的指标值 μ_0 和给定的置信水平 γ ,

母体均值 μ 的单指标强检验步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本根据式(1)和(2)计算 μ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 μ_U 和下限 μ_L 。

(3) 若 $\mu_U \leq \mu_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $\mu \leq \mu_0$ 。

(4) 若 $\mu_L \geq \mu_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $\mu \geq \mu_0$ 。

(5) 若 $\mu_L < \mu_0 < \mu_U$, 则样本信息量太小, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤(2)~(5)。

2.1.2 双侧指标强检验

对于规定的指标值 μ_1, μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$) 和给定的置信水平 γ , 要判断母体均值 μ 是否位于区间 $[\mu_1, \mu_2]$ 之内时, 可采用双指标强检验, 其步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本根据式(3)计算 $F(\mu_1)$ 和 $F(\mu_2)$ 。

(3) 若 $F(\mu_2) - F(\mu_1) \geq \gamma$, 则可在置信水平 γ 下断定 $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ 。

(4) 若 $1 - F(\mu_2) + F(\mu_1) \geq \gamma$, 则可在置信水平 γ 下断定 μ 位于区间 $[\mu_1, \mu_2]$ 之外。

(5) 若 $1 - \gamma < F(\mu_2) - F(\mu_1) < \gamma$, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤(2)~(5)。

2.2 均值的弱检验

工程实践中, 常常根据所研究问题的物理性质、理论推导和实际经验等已基本确认正态母体特征值满足某一条件, 现在只是希望验证一下该条件是否会被拒绝, 当不被拒绝时, 隐含着接受该条件, 此种情况可采用弱检验。

2.2.1 单指标弱检验

对于规定的指标值 μ_0 和给定的置信水平 γ , 母体均值 μ 的单指标弱检验步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取一个样本, 并根据式(1)和(2)计算 μ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 μ_U 和下限 μ_L 。

(2) 若 $\mu_U < \mu_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \geq \mu_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \geq \mu_0$ 。

(3) 若 $\mu_L > \mu_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \leq \mu_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \leq \mu_0$ 。

(4) 若 $\mu_U < \mu_0$ 或 $\mu_L > \mu_0$, 则在置信水平 $2\gamma - 1$ 下拒绝条件 $\mu = \mu_0$; 否则不能在置信水平 $2\gamma - 1$ 下拒绝条件 $\mu = \mu_0$ 。

2.2.2 双侧指标弱检验

对于规定的指标值 $\mu_1, \mu_2 (\mu_1 < \mu_2)$ 和给定的置信水平 γ , 母体均值 μ 的双侧指标弱检验可按如下步骤进行:

(1) 从母体中随机抽取一个样本, 并根据式(3)计算 $F(\mu_1)$ 和 $F(\mu_2)$ 。

(2) 若 $1 - F(\mu_2) + F(\mu_1) > \gamma$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ 。

(3) 若 $F(\mu_2) - F(\mu_1) > \gamma$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \leq \mu_1$ 和 $\mu \geq \mu_2$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\mu \leq \mu_1$ 和 $\mu \geq \mu_2$ 。

2.3 均值的弱强检验

工程中, 有时对产品质量规定两个指标: 合格质量指标和极限质量指标。要求在合格质量指标处采用弱检验, 而在极限质量指标处采用强检验, 这时可采用弱强检验。

2.3.1 下限弱强检验

设 $\mu_0 > \mu_1$, 当 $\mu \geq \mu_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $\mu \leq \mu_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的合格质量指标 μ_0 和极限质量指标 μ_1 处的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本根据式(1)和(2)计算 μ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 μ_U 和下限 μ_L , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 μ_{U1} 和下限 μ_{L1} , 并由下面两式:

$$\mu_U = \bar{x} + t_\gamma(n_0 - 1)s / \sqrt{n_0} \quad (4)$$

$$\mu_L = \bar{x} - t_{\gamma_1}(n_0 - 1)s / \sqrt{n_0} \quad (5)$$

联立消去 $\bar{x}$ 得:

$$n_0 = \left(\frac{t_\gamma(n_0 - 1) + t_{\gamma_1}(n_0 - 1)}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2 s^2 \quad (6)$$

解此方程确定 n_0 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(4)。

(3) 若 $\mu_L > \mu_0$ 和 $\mu_{L1} > \mu_1$, 则认为该批产品合格; 若 $\mu_U < \mu_0$ 或 $\mu_{U1} < \mu_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(2)。

(4) 若 $\mu_U > \mu_0$ 和 $\mu_{L1} > \mu_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

2.3.2 上限弱强检验

设 $\mu_0 < \mu_1$, 当 $\mu \leq \mu_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $\mu \geq \mu_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本, 根据式(1)和(2)计算 μ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 μ_U 和下限 μ_L , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 μ_{U1} 和下限 μ_{L1} , 并由下面两式:

$$\mu_U = \bar{x} - t_\gamma(n_0 - 1)s / \sqrt{n_0} \quad (7)$$

$$\mu_L = \bar{x} + t_{\gamma_1}(n_0 - 1)s / \sqrt{n_0} \quad (8)$$

联立消去 $\bar{x}$, 同样可得式(6), 从式(6)求得 n_0 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(4)。

(3) 若 $\mu_U < \mu_0$ 和 $\mu_{U1} < \mu_1$, 则认为该批产品合格; 若 $\mu_L > \mu_0$ 或 $\mu_{L1} > \mu_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(2)。

(4) 若 $\mu_L < \mu_0$ 和 $\mu_{U1} < \mu_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

3 正态母体标准差的置信检验

正态母体标准差 σ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 σ_U 和下限 σ_L 分别为:

$$\sigma_U = \sqrt{(n-1)s^2 / \chi_{1-\gamma}^2(n-1)} \quad (9)$$

$$\sigma_L = \sqrt{(n-1)s^2 / \chi_\gamma^2(n-1)} \quad (10)$$

式中 $\chi_\gamma^2(n-1)$ 是自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布 γ 分位点。

3.1 标准差的强检验

对于规定的指标值 σ_0 和给定的置信水平 γ , 母体标准差 σ 的单指标强检验步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本根据式(9)和(10)计算 σ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 σ_U 和下限 σ_L 。

(3) 若 $\sigma_U \leq \sigma_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $\sigma \leq \sigma_0$ 。

(4) 若 $\sigma_L \geq \sigma_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $\sigma \geq \sigma_0$ 。

(5) 若 $\sigma_L < \sigma_0 < \sigma_U$, 则样本信息量太小, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤(2)~(5)。

3.2 标准差的弱检验

对于规定的指标值 σ_0 和给定的置信水平 γ ,

母体标准差 σ 的单指标弱检验步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取一个样本, 并根据式 (9) 和 (10) 计算 σ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 σ_U 和下限 σ_L 。

(2) 若 $\sigma_U < \sigma_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\sigma \geq \sigma_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\sigma \geq \sigma_0$ 。

(3) 若 $\sigma_L > \sigma_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $\sigma \leq \sigma_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $\sigma \leq \sigma_0$ 。

(4) 若 $\sigma_U < \sigma_0$ 或 $\sigma_L > \sigma_0$, 则在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $\sigma = \sigma_0$; 否则不能在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $\sigma = \sigma_0$ 。

3.3 标准差的弱强检验

设 $\sigma_0 < \sigma_1$, 当 $\sigma \leq \sigma_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $\sigma \geq \sigma_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 首先由下式:

$$\frac{\chi^2_{1-\gamma_1}(n_0-1)}{\chi^2_{\gamma}(n_0-1)} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 \quad (11)$$

求得 n_0 。

(2) 从母体中随机抽取 2 个试样; 也可直接随机抽取 n_0 个试样。

(3) 由所获样本根据式 (9) 和 (10) 计算标准差 σ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 σ_U 和下限 σ_L , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 σ_{U1} 和下限 σ_{L1} 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤 (5)。

(4) 若 $\sigma_U < \sigma_0$ 和 $\sigma_{U1} < \sigma_1$, 则认为该批产品合格; 若 $\sigma_L > \sigma_0$ 或 $\sigma_{L1} > \sigma_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤 (3)。

(5) 若 $\sigma_L < \sigma_0$ 和 $\sigma_{U1} < \sigma_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

4 正态母体百分位值的置信检验

概率为 P 的正态母体百分位值 $x_p = \mu + u_p \sigma$ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{PU} 和下限 x_{PL} 分别为:

$$x_{PU} = \bar{x} + k_{1-P,\gamma}(n)s \quad (12)$$

$$x_{PL} = \bar{x} - k_{P,\gamma}(n)s \quad (13)$$

式中 $k_{P,\gamma}(n) = t_{\gamma}(n-1, -\sqrt{n}u_p) / \sqrt{n}$ 是单侧容限系数, $t_{\gamma}(n-1, -\sqrt{n}u_p)$ 是非中心 t 分布的 γ 分位点, 其自由度为 $n-1$, 非中心度为 $-\sqrt{n}u_p$, u_p 为标准正态偏量。 $\gamma \geq 0.5$ 时, $k_{P,\gamma}(n)$ 也可由单侧容限系数公式^[3]计算:

$$k_{P,\gamma}(n) = \sqrt{\frac{2n-3}{2n-4}} \left(1 - \frac{u_p^2}{w}\right)^{-1} \times \left[-u_p + u_p \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{u_p^2}{w}\right) + \frac{u_p^2}{w}}\right] \quad (14)$$

$$w = 2 \left[n + u_p - c - 1 - \frac{1}{\sqrt{n + u_p - c - 1}} \right] \quad (15)$$

式中当 $n > 3$ 时, c 值可由文献[3]查得; 当 $n > 5$ 时, 对于 $P \leq 0.5$, 可取 $c = 0.64$; 对于 $P > 0.5$, 可取 $c = 1.24u_p$ 。当 $\gamma < 0.5$ 时, 有 $k_{P,\gamma}(n) = -k_{1-P,1-\gamma}(n)$ 。

4.1 百分位值的强检验

对于规定的指标值 x_{p0} 和置信水平 γ , 可按如下步骤对正态母体百分位值 x_p 进行强检验:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获样本根据式 (12) 和 (13) 计算 x_p 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{PU} 和下限 x_{PL} 。

(3) 若 $x_{PU} \leq x_{p0}$, 则可在置信水平 γ 下断定 $x_p \leq x_{p0}$ 。

(4) 若 $x_{PL} \geq x_{p0}$, 则可在置信水平 γ 下断定 $x_p \geq x_{p0}$ 。

(5) 若 $x_{PL} < x_{p0} < x_{PU}$, 则样本信息量太小, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤 (2)~(5)。

4.2 百分位值的弱检验

对于规定的指标值 x_{p0} 和置信水平 γ , 正态母体百分位值 x_p 的弱检验可按如下步骤进行:

(1) 从母体中随机抽取一个样本, 由式 (12) 和 (13) 计算 x_p 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{PU} 和下限 x_{PL} 。

(2) 若 $x_{PU} < x_{p0}$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $x_p \geq x_{p0}$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $x_p \geq x_{p0}$ 。

(3) 若 $x_{PL} > x_{p0}$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $x_p \leq x_{p0}$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $x_p \leq x_{p0}$ 。

(4) 若 $x_{PU} < x_{p0}$ 或 $x_{PL} > x_{p0}$, 则在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $x_p = x_{p0}$; 否则不能在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $x_p = x_{p0}$ 。

4.3 百分位值的弱强检验

4.3.1 下限弱强检验

设 $x_{p0} > x_{p1}$, 当 $x_p \geq x_{p0}$ 时该批产品合格, 且不允许 $x_p \leq x_{p1}$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。

该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1)从母体中随机抽取 2 个试样。

(2)由所获得的样本根据式(12)和(13)计算百分位值 x_p 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{pU} 和下限 x_{pL} , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 x_{pU1} 和下限 x_{pL1} , 并由下面两式:

$$x_{p0} = \bar{x} + k_{1-p, \gamma}(n_0)s \quad (16)$$

$$x_{p1} = \bar{x} - k_{p, \gamma_1}(n_0)s \quad (17)$$

联立消去 $\bar{x}$, 得:

$$k_{1-p, \gamma}(n_0) + k_{p, \gamma_1}(n_0) = (x_{p0} - x_{p1})/s \quad (18)$$

即:

$$n_0 = s^2 \times \left[\frac{t_{\gamma}(n_0 - 1, \sqrt{n_0}u_p) + t_{\gamma_1}(n_0 - 1, -\sqrt{n_0}u_p)}{x_{p0} - x_{p1}} \right]^2 \quad (19)$$

解此方程确定 n_0 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(4)。

(3)若 $x_{pL} > x_{p0}$ 和 $x_{pL1} > x_{p1}$, 则认为该批产品合格; 若 $x_{pU} < x_{p0}$ 或 $x_{pU1} < x_{p1}$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(2)。

(4)若 $x_{pU} > x_{p0}$ 和 $x_{pL1} > x_{p1}$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

4.3.2 上限弱强检验

设 $x_{p0} < x_{p1}$, 当 $x_p \leq x_{p0}$ 时该批产品合格, 且不允许 $x_p \geq x_{p1}$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1)从母体中随机抽取 2 个试样。

(2)由所获得的样本根据式(12)和(13)计算百分位值 x_p 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{pU} 和下限 x_{pL} , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 x_{pU1} 和下限 x_{pL1} , 并由下面两式:

$$x_{p0} = \bar{x} - k_{p, \gamma}(n_0)s \quad (20)$$

$$x_{p1} = \bar{x} + k_{1-p, \gamma_1}(n_0)s \quad (21)$$

联立消去 $\bar{x}$, 得:

$$k_{p, \gamma}(n_0) + k_{1-p, \gamma_1}(n_0) = (x_{p1} - x_{p0})/s \quad (22)$$

即:

$$n_0 = s^2 \times \left[\frac{t_{\gamma}(n_0 - 1, -\sqrt{n_0}u_p) + t_{\gamma_1}(n_0 - 1, \sqrt{n_0}u_p)}{x_{p0} - x_{p1}} \right]^2 \quad (23)$$

解此方程得 n_0 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(4)。

(3)若 $x_{pU} < x_{p0}$ 和 $x_{pU1} < x_{p1}$, 则认为该批产品合格; 若 $x_{pL} > x_{p0}$ 或 $x_{pL1} > x_{p1}$, 则认为该批产品

不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(2)。

(4)若 $x_{pL} < x_{p0}$ 和 $x_{pU1} < x_{p1}$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

5 正态母体百分率的置信检验

对于给定的 x , 正态母体百分率 $P = P(X \leq x)$ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 P_U 和下限 P_L 分别由下面两式确定:

$$k_{p_U, \gamma}(n) = -(x - \bar{x})/s \quad (24)$$

$$k_{1-P_L, \gamma}(n) = (x - \bar{x})/s \quad (25)$$

根据百分位值的置信上(下)限曲线与百分率的置信下(上)限曲线相同的原理^[1], 可以证明:

$$P(P \leq P_U) = P(x \geq x_{pL}) \quad (26)$$

$$P(P \geq P_L) = P(x \leq x_{pU}) \quad (27)$$

式中 x_{pU} 和 x_{pL} 分别由式(12)和式(13)给出。由此可知, 对百分率 P 的检验可以转换为对百分位值的检验。

5.1 百分率的强检验

对于规定的指标值 P_0 和给定的置信水平 γ , 可按如下步骤对给定值 x 所对应的百分率 P 进行强检验:

(1)从母体中随机抽取 2 个试样。

(2)根据所获样本, 由式(12)和(13)计算概率为 P_0 的母体百分位值 x_{p0} 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{p0U} 和下限 x_{p0L} 。

(3)若 $x \leq x_{p0L}$, 即 $P_U \leq P_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $P \leq P_0$ 。

(4)若 $x \geq x_{p0U}$, 即 $P_L \geq P_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $P \geq P_0$ 。

(5)若 $x_{p0L} < x < x_{p0U}$, 即 $P_L < P_0 < P_U$, 则样本信息量太小, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤(2)~(5)。

5.2 百分率的弱检验

对于规定的指标值 P_0 和给定的置信水平 γ , 可按如下步骤对给定值 x 所对应的百分率 P 进行弱检验:

(1)从母体中随机抽取一个样本, 由式(12)和(13)计算概率为 P_0 的母体百分位值 x_{p0} 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{p0U} 和下限 x_{p0L} 。

(2)若 $x < x_{p0L}$, 即 $P_U < P_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $P \geq P_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒

绝条件 $P \geq P_0$ 。

(3) 若 $x > x_{P_0U}$, 即 $P_L > P_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $P \leq P_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $P \leq P_0$ 。

(4) 若 $x < x_{P_0L}$ 或 $x > x_{P_0U}$, 即 $P_U < P_0$ 或 $P_L > P_0$, 则在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $P = P_0$; 否则不能在置信水平 $2\gamma-1$ 下拒绝条件 $P = P_0$ 。

5.3 百分率的弱强检验

5.3.1 下限弱强检验

设 $P_0 > P_1$, 当 $P \geq P_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $P \leq P_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 首先由下式:

$$k_{P_0, \gamma}(n_0) + k_{1-P_1, \gamma_1}(n_0) = 0 \quad (28)$$

即:

$$\begin{aligned} t_{\gamma}(n_0 - 1, -\sqrt{n_0 u_{P_0}}) + \\ t_{\gamma_1}(n_0 - 1, \sqrt{n_0 u_{P_1}}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

求得 n_0 。

(2) 从母体中随机抽取 2 个试样; 也可直接随机抽取 n_0 个试样。

(3) 根据所获样本, 由式(12)和(13)计算概率为 P_0 的母体百分位值 x_{P_0} 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{P_0U} 和下限 x_{P_0L} , 概率为 P_1 的母体百分位值 x_{P_1} 的置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 x_{P_1U} 和下限 x_{P_1L} 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(5)。

(4) 若 $x > x_{P_0U}$ 和 $x > x_{P_1U}$, 即 $P_L > P_0$ 和 $P_{L1} > P_1$, 则认为该批产品合格; 若 $x < x_{P_0L}$ 或 $x < x_{P_1L}$, 即 $P_U < P_0$ 或 $P_{U1} < P_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(3) (P_{U1} 和 P_{L1} 为百分率 P 的置信水平为 γ_1 的单侧置信上限和下限)。

(5) 若 $x > x_{P_0L}$ 和 $x > x_{P_1U}$, 即 $P_U > P_0$ 和 $P_{L1} > P_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

5.3.2 上限弱强检验

设 $P_0 < P_1$, 当 $P \leq P_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $P \geq P_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 首先由下式:

$$k_{1-P_0, \gamma}(n_0) + k_{P_1, \gamma_1}(n_0) = 0 \quad (30)$$

即:

$$\begin{aligned} t_{\gamma}(n_0 - 1, \sqrt{n_0 u_{P_0}}) + \\ t_{\gamma_1}(n_0 - 1, -\sqrt{n_0 u_{P_1}}) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

求得 n_0 。

(2) 从母体中随机抽取 2 个试样; 也可直接随机抽取 n_0 个试样。

(3) 根据所获样本, 由式(12)和(13)计算概率为 P_0 的母体百分位值 x_{P_0} 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{P_0U} 和下限 x_{P_0L} , 概率为 P_1 的母体百分位值 x_{P_1} 的置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 x_{P_1U} 和下限 x_{P_1L} 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤(5)。

(4) 若 $x < x_{P_0L}$ 和 $x < x_{P_1L}$, 即 $P_U < P_0$ 和 $P_{U1} < P_1$, 则认为该批产品合格; 若 $x > x_{P_0U}$ 或 $x > x_{P_1U}$, 即 $P_L > P_0$ 或 $P_{L1} > P_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤(3)。

(5) 若 $x < x_{P_0U}$ 和 $x < x_{P_1U}$, 即 $P_L < P_0$ 和 $P_{U1} < P_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

6 正态母体变异系数的置信检验

母体变异系数 $C_V = \sigma/\mu$ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 C_U 和下限 C_L 分别由下面两式确定:

$$t_{\gamma}(n-1, \sqrt{n}/C_U) = \sqrt{n}/\hat{C}_V \quad (32)$$

$$t_{\gamma}(n-1, -\sqrt{n}/C_L) = -\sqrt{n}/\hat{C}_V \quad (33)$$

式中 $\hat{C}_V = s/\bar{x}$ 。也可由下面两式计算^[4], 当 $n > 3$, $\hat{C}_V > 0$ 时, 有:

$$C_U = \hat{C}_V \left[\sqrt{\frac{2n-4}{2n-3}} - u_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{C}_V^2}{n} + \frac{2n-4}{(2n-3)w}} \right]^{-1} \quad (34)$$

$$w = 2 \left[n + u_{\gamma} - 1.64 - \frac{1}{\sqrt{n + u_{\gamma} - 1.64}} \right] \quad (35)$$

当 $n > 5$, $\hat{C}_V > 0$ 时, 有:

$$C_L = \hat{C}_V \left[\sqrt{\frac{2n-4}{2n-3}} + u_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{C}_V^2}{n} + \frac{2n-4}{(2n-3)w^*}} \right]^{-1} \quad (36)$$

$$w^* = 2 \left[n - 0.24u_{\gamma} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n - 0.24u_{\gamma} - 1}} \right] \quad (37)$$

当 $\hat{C}_V < 0$ 时, 将式(34)中的 C_U 换成 C_L , 式(36)中

的 C_L 换成 C_U , 仍可用其计算 C_V 的下、上限。

6.1 变异系数的强检验

对于规定的指标值 C_0 和给定的置信水平 γ , 可按如下步骤对母体变异系数 C_V 进行强检验:

(1) 从母体中随机抽取 2 个试样。

(2) 由所获得的样本根据式 (32) 和 (33) 或式 (34) 和 (36) 计算变异系数 C_V 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 C_U 和下限 C_L 。

(3) 若 $C_U \leq C_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $C_V \leq C_0$ 。

(4) 若 $C_L \geq C_0$, 则可在置信水平 γ 下断定 $C_V \geq C_0$ 。

(5) 若 $C_L < C_0 < C_U$, 则样本信息量太小, 无法在置信水平 γ 下作出判断, 需继续从母体中随机抽取一个试样, 并重复步骤 (2)~(5)。

6.2 变异系数的弱检验

对于规定的指标值 C_0 和给定的置信水平 γ , 母体变异系数 C_V 的弱检验步骤如下:

(1) 从母体中随机抽取一个样本, 由式 (32) 和 (33) 或式 (34) 和 (36) 计算母体变异系数 C_V 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 C_U 和下限 C_L 。

(2) 若 $C_U < C_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $C_V \geq C_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $C_V \geq C_0$ 。

(3) 若 $C_L > C_0$, 则在置信水平 γ 下拒绝条件 $C_V \leq C_0$; 否则不能在置信水平 γ 下拒绝条件 $C_V \leq C_0$ 。

(4) 若 $C_U < C_0$ 或 $C_L > C_0$, 则在置信水平 $2\gamma - 1$ 下拒绝条件 $C_V = C_0$; 否则不能在置信水平 $2\gamma - 1$ 下拒绝条件 $C_V = C_0$ 。

6.3 变异系数的弱强检验

设 $C_0 < C_1$, 当 $C_V \leq C_0$ 时该批产品合格, 且不允许 $C_V \geq C_1$; γ 和 γ_1 分别为给定的置信水平。该问题的弱强检验可按如下步骤进行:

(1) 首先由下式:

$$t_{\gamma}(n_0 - 1, -\sqrt{n_0}/C_0) + t_{\gamma_1}(n_0 - 1, \sqrt{n_0}/C_1) = 0 \quad (38)$$

即:

$$k_{P_0, \gamma}(n_0) + k_{1-P_1, \gamma_1}(n_0) = 0 \quad (39)$$

求得 n_0 。式中 $P_0 = \Phi(1/C_0)$ 和 $P_1 = \Phi(1/C_1)$ 。

(2) 从母体中随机抽取 2 个试样; 也可直接随机抽取 n_0 个试样。

(3) 由所获得的样本, 根据式 (32) 和 (33) 或式

(34) 和 (36) 计算母体变异系数 C_V 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 C_U 和下限 C_L , 置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 C_{U1} 和下限 C_{L1} 。若实际抽取的试样总数 $n \geq n_0$, 则转至步骤 (5)。

(4) 若 $C_U < C_0$ 和 $C_{U1} < C_1$, 则认为该批产品合格; 若 $C_L > C_0$ 或 $C_{L1} > C_1$, 则认为该批产品不合格; 否则, 继续从母体中随机抽取一个试样, 并返回步骤 (3)。

(5) 若 $C_L < C_0$ 和 $C_{U1} < C_1$, 则认为该批产品合格; 否则认为该批产品不合格。

7 应用举例

例 1 已知某产品寿命服从对数正态分布, 长期以来该产品可靠度 $R=0.99$ 的可靠寿命 t_R 一直满足条件 $t_R \geq 1300h$ 。新近又生产一批产品, 并从该批产品中随机抽取 12 个试样进行试验, 表 1 给出其寿命数据。现要求确定该批产品是否仍然满足条件 $t_R \geq 1300h$, 置信水平 $\gamma=0.9$ 。

表 1 产品寿命数据

Table 1 Life data of the products

序号 i	寿命 t_i (h)	对数寿命 $x_i = \ln t_i$	序号 i	寿命 t_i (h)	对数寿命 $x_i = \ln t_i$
1	1521.8	7.3276	7	1711.8	7.4453
2	1639.6	7.4022	8	2048.7	7.6250
3	2299.9	7.7406	9	1486.2	7.3040
4	1908.7	7.5542	10	1764.0	7.4753
5	1958.9	7.5801	11	1795.2	7.4929
6	2219.7	7.7051	12	1812.6	7.5025

该问题只需检验条件 $t_R \geq 1300h$ 是否会被拒绝, 因此可以采用本文的弱检验。令 $x_i = \ln t_i$, 计算得样本均值 $\bar{x} = 7.5129$ 和标准差 $s = 0.1363$ 。由 $n = 12, P = 1 - R = 0.01, \gamma = 0.9$ 可知 $k_{1-P, \gamma}(n) = -1.7581$ 。由式 (12) 计算母体百分位值 x_P 的置信度为 $\gamma = 0.9$ 的单侧置信上限:

$$x_{PU} = \bar{x} + k_{1-P, \gamma}(n)s = 7.2733$$

根据本文百分位值的弱检验方法, 由 $x_{PU} = 7.2733 > \ln 1300 = 7.1701$ 可知, 不能在 0.9 的置信水平下拒绝 $x_P \geq 7.1701$, 亦即不拒绝可靠寿命 $t_R \geq 1300h$ 这个条件。上述问题若采用显著性假设检验将非常繁琐。

例 2 某零件强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 技术标准要求单个零件强度 $x \geq L = 415MPa$ 。现以不合格品率 $P = P(X < L)$ 为批质量指标, 对新近生产的一

批零件进行检验。规定合格质量指标 $P_0=0.01$, 极限质量指标 $P_1=0.1$, 即当 $P \leq P_0$ 时该批零件合格, 且不允许 $P \geq P_1$ 。与 P_0 和 P_1 相对应的置信水平分别为 $\gamma=0.95$ 和 $\gamma_1=0.9$ 。该问题可采用母体百分率的上限弱强检验。

表 2 某零件强度及其百分位值的单侧置信限
Table 2 Strengths of the parts
and confidence limits of percentiles

序号 i	x_i (MPa)	上限 x_{P_0U}	下限 x_{P_0L}	上限 x_{P_1U}	下限 x_{P_1L}
1	451.2				
2	431.2	427.7	0.0	435.5	296.2
3	451.1	431.5	323.0	438.3	395.5
4	444.4	432.8	378.2	438.7	414.5
5	455.2	434.0	392.4	440.2	420.7
6	469.3	432.9	386.9	441.4	419.1
7	456.3	434.3	397.1	442.4	424.0
8	460.8	435.5	403.2	443.6	427.3
9	451.1	436.1	408.4	443.7	429.7
10	454.3	436.9	412.7	444.2	431.8
11	465.8	437.3	414.0	445.0	433.0
12	435.2	434.1	410.3	442.5	430.2
13	455.8	434.8	413.1	443.0	431.7
14	456.2	435.5	415.5	443.5	433.0
15	448.1	435.5	416.9	443.3	433.6
16	450.1	435.7	418.5	443.4	434.3
17	451.4	436.1	420.0	443.5	435.0
18	441.6	435.3	419.6	442.8	434.5
19	449.3	435.4	420.7	442.8	435.0
20	456.7	435.9	421.9	443.2	435.7
21	450.4	436.1	422.8	443.3	436.2

首先由式(30)或(31)求得 $n_0=21$ 。然后从该批零件中逐一随机抽取试样, 从第 2 个试样开始, 每测得一个零件强度, 就由式(12)和(13)计算一次 $x_{P_0}=\mu+u_{P_0}\sigma$ 的置信水平为 γ 的单侧置信上限 x_{P_0U} 和 下限 x_{P_0L} , 以及 $x_{P_1}=\mu+u_{P_1}\sigma$ 的置信水平为 γ_1 的单侧置信上限 x_{P_1U} 和 下限 x_{P_1L} , 结果列于表 2。从表 2 可知, 当抽取到第 14 个试样后, 由于 $L < x_{P_0L}$ 和 $L < x_{P_1L}$, 即有 $P_U < P_0$ 和 $P_{U1} < P_1$, 所以根据母体百分率上限弱强检验步骤(4)中的判断规则, 能够断定该批零件合格, 并结束检验。

对于该问题也可一次随机抽取 21 个试样, 并计算 x_{P_0U} 和 x_{P_1L} , 根据上限弱强检验步骤(5)中的判断规则, 由于 $L < x_{P_0U}$ 和 $L < x_{P_1L}$, 即有 $P_L < P_0$

和 $P_{U1} < P_1$, 所以可认为该批零件合格。

从上述序贯和非序贯两种检验方法可以看到, 虽然结果都可以判断该批零件合格, 但是, 序贯检验方法可以节省三分之一的试样, 并且在合格质量指标 P_0 和 极限质量指标 P_1 处都是强检验, 即可以得出 $P(P < P_0) \geq \gamma$ 和 $P(P < P_1) \geq \gamma_1$ 。而非序贯检验相当于传统抽样检验, 不但要多费三分之一的试样, 并且在合格质量指标 P_0 处还是弱检验, 在极限质量指标 P_1 处才是强检验, 即只能得出 $P(P < P_1) \geq \gamma_1$, 不能断定 $P(P < P_0) \geq \gamma$ 。

8 结 论

(1)建立了正态母体特征值的置信检验方法, 包括母体均值、百分位值、百分率、标准差和变异系数的强检验、弱检验和弱强检验, 可以满足不同的工程检验需求。

(2)强检验能够以高概率确认正态母体特征值是否满足工程中规定的条件, 并且在小样本时就可进行判断。与假设检验和抽样检验相比, 强检验能够大大提高工程检验精度。

(3)正态分布弱检验属于拒绝检验, 等价于显著性假设检验, 但是其检验的性质更加明确, “弱”字本身意味着当某一条件不被拒绝时就接受它理由是不充分的。

(4)弱强检验分序贯和非序贯两种方法, 序贯方法具有所需试样少的优点; 非序贯方法等价于传统的抽样检验, 它在合格质量处是弱检验, 在极限质量处是强检验, 而抽样检验何处“弱”, 何处“强”, 混淆不清。

(5)正态母体百分位值、百分率和变异系数的检验问题, 在假设检验和抽样检验中往往较为复杂, 但采用置信检验却简便易行。

参考文献:

- [1] 傅惠民. 可靠性假设检验[J]. 航空学报, 1992, 13(7): 365-370.
- [2] 傅惠民, 梁朝虎. 置信检验理论[J]. 航空动力学报, 2003, 18(2): 167-174.
- [3] 傅惠民. 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式[J]. 航空学报, 1994, 15(1): 94-101.
- [4] 傅惠民. 二维变差系数置信限公式[J]. 机械强度, 1994, 16(4): 31-33.
- [5] Acheson J Duncan. Quality Control and Industrial Statistics [M]. Fifth Edition, Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, INC., 1986.
- [6] 于善奇. 抽样检验与质量控制[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.